

KIỂM TRA GIỮA KỶ

Học phần: Đại số đại cương 1

Thời gian: 09h00 → 11h00,
24/04/2024.

Bài 1 (3 điểm) Xét phép toán hai ngôi trên \mathbb{R}^4 như sau

$$* : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$\left((a_0, a_1, a_2, a_3), (b_0, b_1, b_2, b_3) \right) \longmapsto (a_0 b_0, a_0 b_1 + b_0 a_1, a_0 b_2 + b_0 a_2, a_0 b_3 + b_0 a_3).$$

Chứng minh rằng

a) Phép toán $*$ có tính chất kết hợp và giao hoán;

b) Phép toán $*$ có phần tử đơn vị;

c) Mọi phần tử $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ với $a_0 \neq 0$ có phần tử nghịch đảo đối với phép toán $*$.

Bài 2 (2 điểm) Xét quan hệ hai ngôi sau trên \mathbb{R}

$$a \sim b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b.$$

a) Chứng minh rằng \sim là một quan hệ tương đương trên \mathbb{R} .

b) Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$, \bar{a} là tập hợp hữu hạn.

Bài 3 (3 điểm) Cho c là một số thực dương và tập hợp

$$G = (-c, c).$$

Với mọi $x, y \in G$, ta định nghĩa

$$x * y := \frac{x+y}{1 + \frac{xy}{c^2}}.$$

a) Chứng minh rằng $*$ là một phép toán hai ngôi trên G .

b) Chứng minh rằng $(G, *)$ là một nhóm giao hoán.

Bài 4 (2 điểm) Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ i & 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Chứng minh rằng

$$A^4 = I_2, \quad A^2 = B^2, \quad BA = A^3 B.$$

b) Chứng minh rằng

$$Q = \{I_2, A, A^2, A^3, B, AB, A^2 B, A^3 B\}$$

là một nhóm con của nhóm $(GL_2(\mathbb{C}), \cdot)$.

