

KIỂM TRA GIỮA KỲ

Học phần: Lý thuyết môđun

Thời gian: 15h00 → 17h00,

Ngày 22/04/2024

Bài 1 (2 điểm)

Cho R là một vành giao hoán có đơn vị.

Ký hiệu

$$R^{\mathbb{N}} := \{ f : \mathbb{N} \rightarrow R \}$$

là tập hợp tất cả các ánh xạ từ \mathbb{N} đến R . Trên $R^{\mathbb{N}}$, xét hai ánh xạ sau

$$\begin{aligned} + : R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}} &\longrightarrow R^{\mathbb{N}} \\ (f, g) &\longmapsto f+g, \end{aligned}$$

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n), \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\begin{aligned} \cdot : R \times R^{\mathbb{N}} &\longrightarrow R^{\mathbb{N}} \\ (r, f) &\longmapsto r \cdot f, \end{aligned}$$

$$(r \cdot f)(n) := r \cdot f(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng $(R^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ là một R -môđun.

Bài 2 (2 điểm) Cho M là một R -môđun và I là một
iđêan của R . Ký hiệu

$$IM := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in I, a_i \in M \right\}$$

CMR IM là một môđun con của M .

Bài 3 (2 điểm) Cho M là một R -môđun và A, B, C là
các môđun con của M thỏa mãn $C \subseteq A$. Chứng minh rằng

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C.$$

Bài 4 (2 điểm) Cho $f: M \rightarrow N$ là một R -đồng cấu
môđun và $A \leq M, B \leq N$. Chứng minh rằng

a) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B;$

b) $f^{-1}(B + f(A)) = f^{-1}(B) + A.$

Bài 5 (2 điểm) Chứng minh rằng nếu $\gcd(a, b) = 1$ thì

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$$

nhì là các \mathbb{Z} -môđun.

